Ejercicio Cambio de Base

Considere las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$:

$S_1 = \{u_1 = (1, -2), u_2 = (3, -4)\} \quad y \quad S_2 = \{v_1 = (1, 3), v_2 = (3, 8)\}$

PIDEN:

$a)$ Encontrar las coordenadas de un vector arbitrario $v = (a, b)$ relativas aa la base $S_1 = \{u_1, u_2\}$

$b)$ Hallar la matriz de cambio de base P desde S_1 hasta S_2.

DESARROLLO:

$a)$ Sea $v = x u_1 + y u_2$ para incongnitas x e y:

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Tambien lo podemos representar asi:

$x + 3y = a$

$-2x - 4y = b$

O asi:

$x + 3y = a$

$2y = 2a + b$

Ahora, despejamos x ee y en terminos de a yy b para obtener $x = -2a - \frac{3}{2}b$, $y = a + \frac{1}{2}b$. Entonces,

$(a, b) = (-2a - \frac{3}{2}b)u_1 + (a + \frac{1}{2}b)u_2$

Tambien lo podemos escribir como,

$\Big[(a, b)]_{s_1} = [-2a - \frac{3}{2}b, a + \frac{1}{2}b]^T$

$b)$ Usamos $a)$ para escribir v_1 yy v_2 de la base S_2 como combinacion lineal de u_1 yy u_2 de S_1

$v_1 = (1, 3) = (-2 - \frac{9}{2})u_1 + (1 + \frac{3}{2})u_2 = (-\frac{13}{2})u_1 + (\frac{5}{2})u_2$

$v_2 = (3, 8) = (-6 - 12)u_1 + (3 + 4)u_2 = -18u_1 + 7u_2$

Entonces concluimos que P es la matriz con columnas de coordenadas v_1 yy v_2 respecto a la base S_1, es decir:

$P = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & -18 \\ \frac{5}{2} & 7 \end{pmatrix}$